Une théorie statistique pour l'agrégation de classements

Forum des jeunes mathématiciennes 2017

Anna Korba, Stéphan Clémençon, Eric Sibony

November 27, 2017

Télécom ParisTech

Table des matières

L'agrégation de classements

L'agrégation de classements

Cadre

- n objets: $\{1, \ldots, n\}$.
- N agents qui forment chacun un classement complet de ces objets, du premier au dernier objet dans l'ordre des préférences:
  $i_1 \succ i_2 \succ \cdots \succ i_n$.
  Exemple: $2 \succ 3 \succ 1 \succ 4$

L'agrégation de classements

Cadre

- n objets: $\{1, \ldots, n\}$.
- N agents qui forment chacun un classement complet de ces objets, du premier au dernier objet dans l'ordre des préférences:
  $i_1 \succ i_2 \succ \cdots \succ i_n$.
  Exemple: $2 \succ 3 \succ 1 \succ 4$

Données

- $i_1 \succ \cdots \succ i_n \iff$ permutation σ sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\sigma(i_j) = j$.
  Exemple: $\sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2 \ldots$
- une collection de N classements est donc une collection de permutations $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathfrak{S}_n^N$.

L'agrégation de classements

Cadre

- n objets: $\{1, \ldots, n\}$.
- N agents qui forment chacun un classement complet de ces objets, du premier au dernier objet dans l'ordre des préférences:
  $i_1 \succ i_2 \succ \cdots \succ i_n$.
  Exemple: $2 \succ 3 \succ 1 \succ 4$

Données

- $i_1 \succ \cdots \succ i_n \iff$ permutation σ sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\sigma(i_j) = j$.
  Exemple: $\sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2 \ldots$
- une collection de N classements est donc une collection de permutations $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathfrak{S}_n^N$.

Problème

On veut retrouver un ordre global ("consensus") σ^* sur les n objets.
$\Longrightarrow$ Quelle permutation $\sigma^* \in \mathfrak{S}_n$ représente le mieux la collection de permutations $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$?

Exemple 1 - Elections

Soit un ensemble de candidats:  ,  ,  ,  . Chaque électeur peut donner par exemple:

- son candidat favori:  $\succ$  ,  , 
- un classement :  $\succ$  $\succ$  $\succ$ 

L'ensemble des votes récoltés pour l'élection constitue un **dataset de classements**.

Exemple 1 - Elections

Soit un ensemble de candidats:  ,  ,  ,  . Chaque électeur peut donner par exemple:

- son candidat favori:  $\succ$  ,  , 
- un classement :  $\succ$  $\succ$  $\succ$ 

L'ensemble des votes récoltés pour l'élection constitue un **dataset de classements**.

$\Rightarrow$ Comment élire le (les) vainqueur(s)?

Débat Borda-Condorcet au 18^{th} siècle

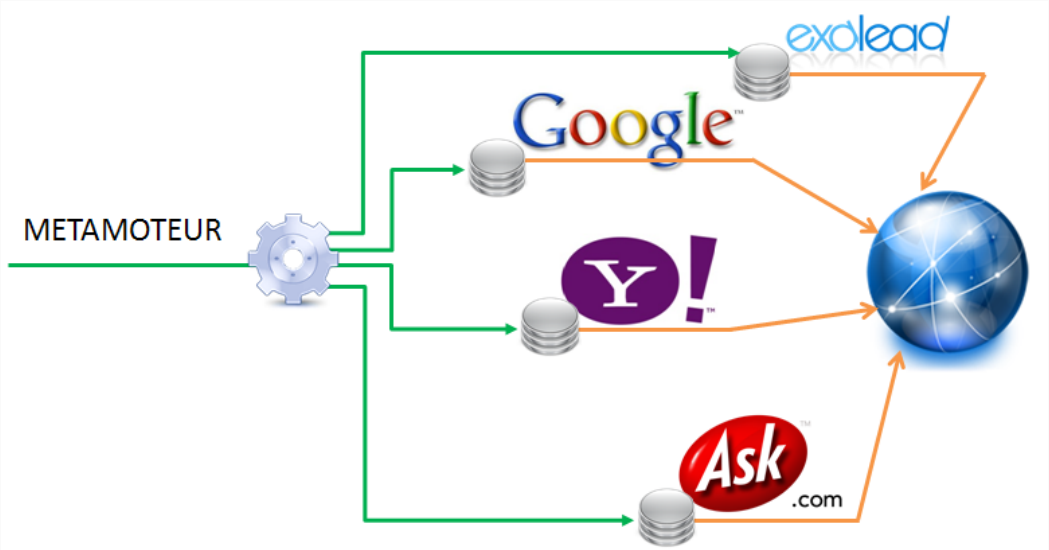
Jean-Charles de Borda

Nicolas de Condorcet

Exemple 2: Métamoteurs

Comment dépasser le biais d'un moteur de recherche?

$\Rightarrow$ En agrégeant les listes ordonnées de plusieurs moteurs

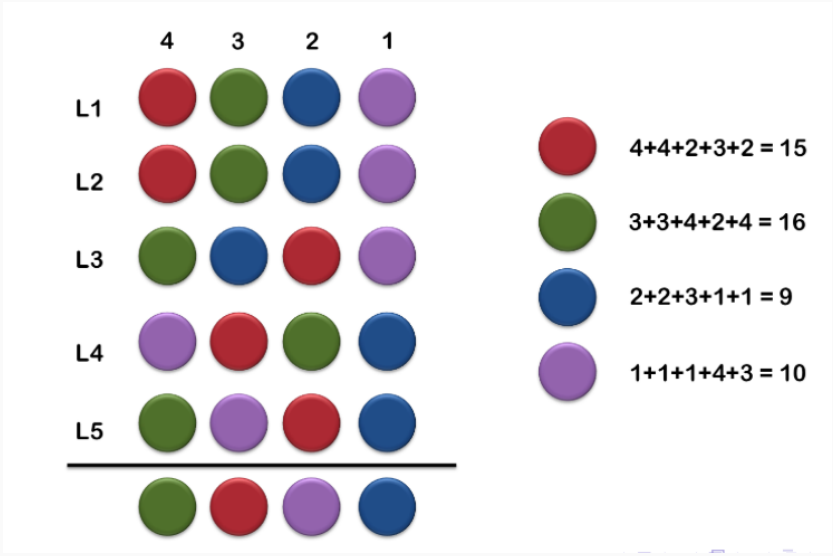


Méthodes - Les règles de Borda et Copeland

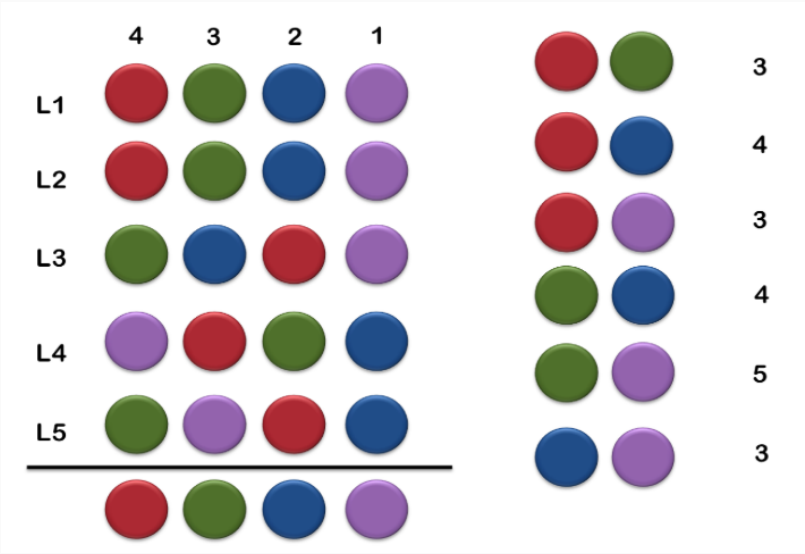
Idée: calculer un score par objet et classer les objets selon leurs scores.

- score de Borda (méthode de vote pondéré):
  $s_B(i) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(n+1-\sigma_t(i))$
- score de Copeland (méthode de Condorcet):
  $s_C(i) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\mathbb{I}[\sigma_t(i) < \sigma_t(j)]$

Borda



Copeland



Méthodes - La règle de Kemeny (1959)

Etant donné un dataset $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathfrak{S}_n^N$, une approche populaire pour agréger des classements est la règle de Kemeny, qui consiste à trouver la solution du problème suivant:

$$min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^{N} d(\sigma, \sigma_t) \tag{1}$$

Méthodes - La règle de Kemeny (1959)

Etant donné un dataset $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathfrak{S}_n^N$, une approche populaire pour agréger des classements est la règle de Kemeny, qui consiste à trouver la solution du problème suivant:

$$min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^{N} d(\sigma, \sigma_t) \tag{1}$$

où d est la distance de Kendall:

$$d(\sigma, \pi) = \sum_{\{i,j\} \subset [\![n]\!]} \{(\sigma(i) - \sigma(j))(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}$$

Méthodes - La règle de Kemeny (1959)

Etant donné un dataset $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathfrak{S}_n^N$, une approche populaire pour agréger des classements est la règle de Kemeny, qui consiste à trouver la solution du problème suivant:

$$min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^{N} d(\sigma, \sigma_t) \tag{1}$$

où d est la distance de Kendall:

$$d(\sigma, \pi) = \sum_{\{i,j\} \subset [\![n]\!]} \{(\sigma(i) - \sigma(j))(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}$$

Exemple

σ= 1234 ($1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$)

π= 2413 ($2 \succ 4 \succ 1 \succ 3$)

$\rightarrow$ nombre de désaccords = sur 3 paires (12,14,34).

Les propriétés du consensus de Kemeny

- **Justification en choix social**: Satisfait de nombreuses propriétés, comme le critère de Condorcet: si un candidat gagne en duel contre chaque autre candidat, il est vainqueur [Young and Levenglick, 1978]
- **Justification statistique**: Correspond au paramètre qui maximise la vraisemblance sous le modèle de Mallows [Young, 1988]
- **Inconvénient**: Ce problème est NP-difficile en terme de nombre de votes N [Bartholdi et al., 1989] même pour n $= 4$ [Dwork et al., 2001].

Reformulation statistique

Supposons que le dataset est composé de N copies i.i.d $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ d'une variable aléatoire $\Sigma \sim P$. Une médiane de P selon d est une solution du problème suivant:

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)],$$

où $L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$ est **le risque théorique** de σ. Soit $\widehat{L}_N(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} d(\Sigma_t, \sigma)$ **le risque empirique**.

Reformulation statistique

Supposons que le dataset est composé de N copies i.i.d $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ d'une variable aléatoire $\Sigma \sim P$. Une médiane de P selon d est une solution du problème suivant:

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)],$$

où $L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$ est **le risque théorique** de σ. Soit $\widehat{L}_N(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} d(\Sigma_t, \sigma)$ **le risque empirique**.

But de notre analyse ?

Etudier la performance de **médianes de Kemeny empiriques**, i.e. solutions $\widehat{\sigma}_N$ de:

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \widehat{L}_N(\sigma),$$

à travers **l'excès de risque** $L(\widehat{\sigma}_N) - L^*$?

$\Rightarrow$ Lien avec Borda et Copeland

Etude du risque théorique

Rappel classification binaire - 1

On observe (X_i, Y_i) qui sont des réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire (X, Y), où X est une quantité aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, A)$ et Y est un label, i.e., une variable aléatoire binaire sur $[\![0, 1]\!]$.
On définit la fonction de régression par:

$$\eta(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] = \mathbb{P}[Y = 1|X = x]$$

Rappel classification binaire - 1

On observe (X_i, Y_i) qui sont des réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire (X, Y), où X est une quantité aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, A)$ et Y est un label, i.e., une variable aléatoire binaire sur $[\![0, 1]\!]$.
On définit la fonction de régression par:

$$\eta(x) = \mathbb{E}[Y|X = x] = \mathbb{P}[Y = 1|X = x]$$

Soit $h : \mathcal{X} \Rightarrow [\![0, 1]\!]$ un classifieur, i.e un prédicteur qui observant X, prédit le label $h(X)$. La performance du classifieur h est mesurée par l'erreur de classification :

$$R(h) = \mathbb{P}[Y \neq h(X)].$$

Rappel classification binaire - 2

Ce risque s'écrit:

$$R(h) = \mathbb{P}[Y \neq h(X)] = \int \mathbb{P}[Y \neq h(x)|X = x]P_X(dx).$$

avec:

$$\mathbb{P}[Y \neq h(x)|X = x] = \eta(x)\mathbb{I}[h(x) = 0] + (1\text{-}\eta(x))\ \mathbb{I}[h(x) = 1]$$

Rappel classification binaire - 2

Ce risque s'écrit:

$$R(h) = \mathbb{P}[Y \neq h(X)] = \int \mathbb{P}[Y \neq h(x)|X = x]P_X(dx).$$

avec:

$$\mathbb{P}[Y \neq h(x)|X = x] = \eta(x)\mathbb{I}[h(x) = 0] + (1\text{-}\eta(x))\ \mathbb{I}[h(x) = 1]$$

Il existe un classifieur qui atteint l'erreur minimale: $R^* = \min_h R(h)$.
C'est le classifieur de Bayes h^* défini par:

$$h^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \eta(x) > 1/2 \\ 0 \text{ si } \eta(x) \leq 1 \end{cases}$$

Interprétation de h^*

Donc si la probabilité du label 1 sachant l'entrée x est supèrieure à $1/2$, le classifieur de Bayes prédit 1.

Risque de l'agrégation de classement

Le risque d'une médiane σ est:

$$L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$$

où d est la distance de Kendall:

$$d(\sigma, \pi) = \sum_{\{i,j\} \subset [\![n]\!]} \{(\sigma(i) - \sigma(j))(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}$$

Soit $p_{i,j} = \mathbb{P}[\Sigma(i) < \Sigma(j)]$ la probabilité que l'objet i soit préféré à j.

Risque de l'agrégation de classement

Le risque d'une médiane σ est:

$$L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$$

où d est la distance de Kendall:

$$d(\sigma, \pi) = \sum_{\{i,j\} \subset [\![n]\!]} \{(\sigma(i) - \sigma(j))(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}$$

Soit $p_{i,j} = \mathbb{P}[\Sigma(i) < \Sigma(j)]$ la probabilité que l'objet i soit préféré à j.

On peut réécrire le risque:

$$L(\sigma) = \sum_{i<j} p_{i,j} \mathbb{I}\{\sigma(i) > \sigma(j)\} + \sum_{i<j} (1 - p_{i,j}) \mathbb{I}\{\sigma(i) < \sigma(j)\}.$$

Risque de l'agrégation de classement

Le risque d'une médiane σ est:

$$L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma \sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$$

où d est la distance de Kendall:

$$d(\sigma, \pi) = \sum_{\{i,j\} \subset [\![n]\!]} \{(\sigma(i) - \sigma(j))(\pi(i) - \pi(j)) < 0\}$$

Soit $p_{i,j} = \mathbb{P}[\Sigma(i) < \Sigma(j)]$ la probabilité que l'objet i soit préféré à j.

On peut réécrire le risque:

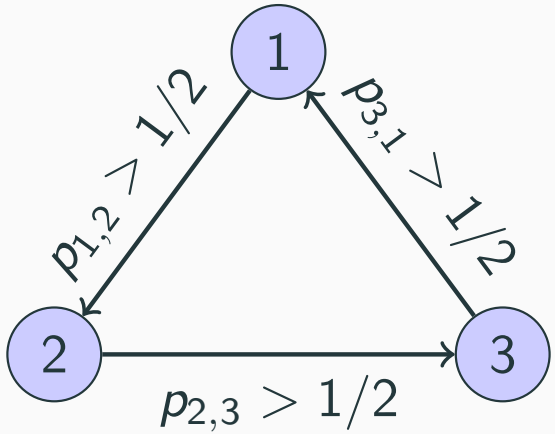
$$L(\sigma) = \sum_{i<j} p_{i,j} \mathbb{I}\{\sigma(i) > \sigma(j)\} + \sum_{i<j} (1 - p_{i,j}) \mathbb{I}\{\sigma(i) < \sigma(j)\}.$$

Donc s'il existe une permutation σ qui vérifie: $\forall i < j$ tel que $p_{i,j} \neq 1/2$,

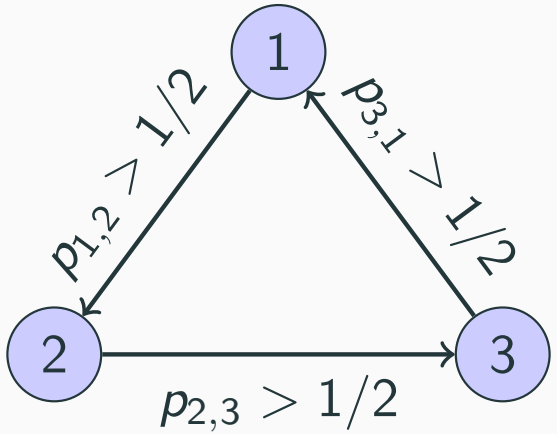
$$(\sigma(j) - \sigma(i)) \cdot (p_{i,j} - 1/2) > 0, \tag{2}$$

elle sera nécessairement une médiane pour P.

Cycles de préférences

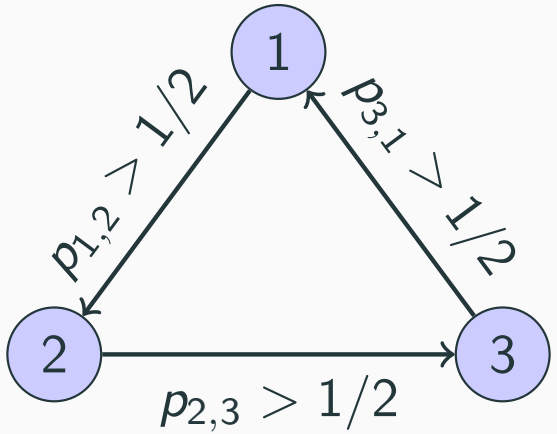


Cycles de préférences



$\rightarrow$ Aucune permutation/aucun consensus ne peut satisfaire la condition pour chaque paire d'objets!

Cycles de préférences



$\rightarrow$ Aucune permutation/aucun consensus ne peut satisfaire la condition pour chaque paire d'objets!

Définition - Transitivité stochastique

P sur $\mathfrak{S}_n$ est stochastiquement transitive si : $\forall (i,j,k) \in [\![n]\!]^3$,

$$p_{i,j} \geq 1/2 \text{ and } p_{j,k} \geq 1/2 \Rightarrow p_{i,k} \geq 1/2.$$

De plus, si $p_{i,j} \neq 1/2$ pour tout $i < j$, P est strictement stochastiquement transitive.

Optimalité

Théorème

Si P est stochastiquement transitive:

- il existe $\sigma^* \in \mathfrak{S}_n$ telle que (2) est vraie
- l'ensemble des médianes de P est la classe d'équivalence de σ^* selon la relation d'équivalence:

$$\sigma \mathcal{R}_P \sigma' \Leftrightarrow (\sigma(j)-\sigma(i))(\sigma'(j)-\sigma'(i)) > 0 \text{ pour tout } i < j \text{ t.q. } p_{i,j} \neq 1/2.$$

Optimalité

Théorème

Si P est stochastiquement transitive:

- il existe $\sigma^* \in \mathfrak{S}_n$ telle que (2) est vraie
- l'ensemble des médianes de P est la classe d'équivalence de σ^* selon la relation d'équivalence:

$$\sigma \mathcal{R}_P \sigma' \Leftrightarrow (\sigma(j)-\sigma(i))(\sigma'(j)-\sigma'(i)) > 0 \text{ pour tout } i < j \text{ t.q. } p_{i,j} \neq 1/2.$$

De plus, le mapping s^* (**Copeland score**) qui pour chaque objet i vaut:

$$s^*(i) = 1 + \sum_{k \neq i} \mathbb{I}\{p_{i,k} < \frac{1}{2}\}$$

appartient à $\mathfrak{S}_n$ et est l'unique médiane de P ssi P est strictement stochastiquement transitive.

Vitesses de convergence

Vitesses de convergence

Soit $\widehat{L}_N(\sigma) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} d(\Sigma_t, \sigma)$ et $L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma\sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$.

Nous voulons comparer la perte/le risque de:

- la (une) solution empirique: $\widehat{\sigma}_N = \text{argmin}_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \widehat{L}_N(\sigma)$
- la (une) solution optimale: $\sigma^* = \text{argmin}_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} L(\sigma)$

Donc $\mathbb{E}\left[L(\widehat{\sigma}_N) - L^*\right]$. Dans le cas général (pas d'hypothèses sur la distribution P), nous obtenons...

Vitesses de convergence

Soit $\widehat{L}_N(\sigma) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} d(\Sigma_t, \sigma)$ et $L(\sigma) = \mathbb{E}_{\Sigma\sim P}[d(\Sigma, \sigma)]$.

Nous voulons comparer la perte/le risque de:

- la (une) solution empirique: $\widehat{\sigma}_N = \text{argmin}_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \widehat{L}_N(\sigma)$
- la (une) solution optimale: $\sigma^* = \text{argmin}_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} L(\sigma)$

Donc $\mathbb{E}\left[L(\widehat{\sigma}_N) - L^*\right]$. Dans le cas général (pas d'hypothèses sur la distribution P), nous obtenons...

Des vitesses de convergence classiques:

$\mathbb{E}\left[L(\widehat{\sigma}_N) - L^*\right]$ décroît à vitesse $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$\mathbb{E}\left[L(\widehat{\sigma}_N) - L^*\right] \leq \frac{n(n-1)}{2\sqrt{N}}$$

Conditions pour des vitesses de convergence rapides

Supposons que P vérifie:

- la transitivité stochastique:

$$p_{i,j} \geq 1/2 \text{ and } p_{j,k} \geq 1/2 \Rightarrow p_{i,k} \geq 1/2. \tag{3}$$

- la condition low-noise **NA**(h) pour un $h > 0$:

$$\min_{i<j} |p_{i,j} - 1/2| \geq h. \tag{4}$$

Conditions pour des vitesses de convergence rapides

Supposons que P vérifie:

- la transitivité stochastique:

$$p_{i,j} \geq 1/2 \text{ and } p_{j,k} \geq 1/2 \Rightarrow p_{i,k} \geq 1/2. \tag{3}$$

- la condition low-noise **NA**(h) pour un $h > 0$:

$$\min_{i<j} |p_{i,j} - 1/2| \geq h. \tag{4}$$

Vitesses rapides

$\Rightarrow$ Introduced for binary classification (see Koltchinskii and Beznosova, 2005).

$\Rightarrow$ Used for estimation of matrix of pairwise probabilities (see Shah et al., 2016).

Vitesses rapides

Soit $\alpha_h = \frac{1}{2}\log\left(1/(1-4h^2)\right)$.

Supposons que P satisfait les conditions précédentes.

(i) Pour toute médiane de Kemeny empirique $\widehat{\sigma}_N$, nous avons:

$$\mathbb{E}\left[L(\widehat{\sigma}_N) - L^*\right] \leq \frac{n^2(n-1)^2}{8} e^{-\alpha_h N}.$$

(ii) Avec probabilité au moins $1 - (n(n-1)/4)e^{-\alpha_h N}$, le score de Copeland empirique

$$\widehat{s}_N(i) = 1 + \sum_{k \neq i} \mathbb{I}\{\widehat{p}_{i,k} < \frac{1}{2}\}$$

for $1 \leq i \leq n$ appartient à $\mathfrak{S}_n$ et est l'unique solution du problème de minimisation de Kemeny empirique.

$\Rightarrow$ En pratique: sous les conditions précédentes, la méthode de Copeland ($\mathcal{O}(N\binom{n}{2})$) donne le consensus de Kemeny avec grande probabilité.

Conclusion

Conclusion

- Cadre statistique général pour l'agrégation de classements: description des conditions d'optimalité , garanties théoriques pour la généralisation d'un consensus de Kemeny empirique.

Conclusion

- Cadre statistique général pour l'agrégation de classements: description des conditions d'optimalité , garanties théoriques pour la généralisation d'un consensus de Kemeny empirique.
- Notre cadre est valable avec des classements complets sur les objets mais aussi avec des comparaisons par paires (plus courantes dans les applications modernes)

Conclusion

- Cadre statistique général pour l'agrégation de classements: description des conditions d'optimalité , garanties théoriques pour la généralisation d'un consensus de Kemeny empirique.
- Notre cadre est valable avec des classements complets sur les objets mais aussi avec des comparaisons par paires (plus courantes dans les applications modernes)
- Analogie avec les vitesses rapides obtenues en classification (Koltchinskii et Beznosova en 2005)

Conclusion

- Cadre statistique général pour l'agrégation de classements: description des conditions d'optimalité , garanties théoriques pour la généralisation d'un consensus de Kemeny empirique.
- Notre cadre est valable avec des classements complets sur les objets mais aussi avec des comparaisons par paires (plus courantes dans les applications modernes)
- Analogie avec les vitesses rapides obtenues en classification (Koltchinskii et Beznosova en 2005)
- Conséquence pratique du dernier résultat: sous la condition low-noise, la méthode de Copeland ($\mathcal{O}(N\binom{n}{2})$) donne le consensus de Kemeny (NP-difficile) avec très grande probabilité.

Travail en cours - Ranking Median Regression

We assume now that we observe $(X_1, \Sigma_1) \ldots, (X_1, \Sigma_N)$ i.i.d. copies of the pair (X, Σ).

Goal: build a predictive ranking rule s that minimizes

$$\mathcal{R}(s) = \mathbb{E}_{X\sim\mu}[\mathbb{E}_{\Sigma\sim P_X}[d(s(X), \Sigma)]] = \mathbb{E}_{X\sim\mu}[L_{P_X}(s(X))].$$

Our idea: Develop algorithms to approximate s by piecewise constant

functions, by computing **ranking aggregates at a local level**.

Merci!